Programme de Terminale C

(**Horaire hebdomadaire : 9 heures**)

a) Les paragraphes marqués d'un astérisque (*) ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisés, en mathématiques, d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

b) Les rubriques du programme comportent un ordre d'énumération. Cet ordre exprime parfois une intention dont les professeurs pourront s'inspirer, mais il ne saurait être imposé ; par exemple, il est loisible de permuter au I - 3 trois alinéas concernant les nombres entiers, les III - 1 et 2 (notions de continuité et de limite), de donner, en II - 3, une autre introduction des nombres complexes, etc.

c) Chaque fois que l'occasion s'en présentera on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et morphismes (noyau), automorphismes rencontrés.

I. – Nombres entiers naturels. Arithmétique

1 - Énoncé des propriétés attribuées à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Raisonnement par récurrence. Applications de $\mathbb{N}$ dans un ensemble X ; notation indicielle ; exemples.

2 - Anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, multiples d'un entier relatif : notation $n\mathbb{Z}$. Congruences modulo n ; l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{N}$. Principe des systèmes de numération ; base ; numérations décimale et binaire.

3 - a) Nombres premiers dans $\mathbb{Z}$; si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

b) Décomposition d'un nombre en facteurs premiers ; existence, unicité.

c) Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple ; nombres premiers entre eux : identité de Bezout

(l'ordre de a), b), c) est laissé au choix du professeur.)

II. – Nombres réels. Calcul numérique. Nombres complexes

1 - Inventaire (sans démonstration) des propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné (révision) ; toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant ; tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.

2 - Valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel.

Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée (l'étude de la périodicité n'est pas au programme)

Valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, incertitudes absolue et relative.

Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres réels dont on connaît des valeurs approchées.

De nombreux exercices de calcul numérique seront faits à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat, d'incertitude (cf. V - 8)

3 - L'addition et la multiplication des matrices 2×2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'une structure de corps commutatif. Identification de $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ par l'application $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. Notation $a + ib$; nombre complexe ; nombres complexes conjugués ; module d'un nombre complexe.

4 - Homorphisme de Θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (rappel de Première) ; forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : $r(\cos x + i \sin x)$ avec $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$; argument d'un tel nombre (classe des nombres x ou, par abus de langage, l'un d'eux).

Calcul de $\cos nx$ et de $\sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, 4$) et linéarisation des polynômes trigonométriques. Existence et représentation géométrique des racines n-ièmes d'un nombre complexe.

5 - Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients complexes ; calcul des parties réelles et imaginaires des racines ; cas des coefficients réels.

III. – Calcul différentiel

1 - Fonctions numériques d'une variable réelle t continuité.

Continuité « en un point » ; continuité sur un intervalle ; somme, produit, quotient de fonctions continues ; continuité de la fonction composée de deux fonctions continues (sans démonstration).

On admettra sans démonstration le théorème suivant : « si une fonction est continue sur un intervalle l'image par la fonction, de cet intervalle est un intervalle ». Application à une fonction continue et striçtement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque ; monotonie et continuité de cette fonction (on admettra la continuité).

2 - Fonctions numériques d'une variable réelle : limites.

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.

Cas particulier des suites.

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans démonstration).

3 - Fonctions num5riques d'une variable réelle : dérivation.

Révision du programme de première C : fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée : notation différentielle ; dérivée en ce point.

Fonction dérivée ; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien) ; équation de la tangente. Définition des dérivées successives.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.

Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.

On admettra sans démonstration que, si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle et si sa dérivée est positive ou nulle, elle est croissante au sens large sur cet intervalle.

Comparaison de deux fonctions ayant même fonction dérivée sur un intervalle. Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à aide du signe de sa dérivée.

Représentation graphique ; exercices simples de recherches d'asymptotes.

4 - Fonctions vectorielles d'une variable réelle.

Application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Continuité en un point.

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini.

Dérivée en un point ; si l'espace vectoriel est rapporté à une base, coordonnées, dans cette base, de la dérivée ; fonction dérivée.

Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles dérivables, du produit d'une fonction vectorielle dérivable par une fonction numérique dérivable.

Dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables.

Application à la recherche de tangentes ; exemples des coniques et des hélices circulaires.

5 - Cinématique du point.

Mouvement d'un point : application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace affine euclidien. Trajectoire.

Vecteur-vitesse à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-vitesse dans ce repère. Norme du vecteur-vitesse.

Vecteur-accélération à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-accélération dans ce repère. -

Étude des mouvements circulaires étude des mouvements hélicoïdaux uniformes.

IV. – Calcul intégral

1 - Définition des sommes de Riemann d'une fonction numérique d'une variable réelle, sur un intervalle fermé borné. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone ; notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Premières propriétés.

On admettra qu'elles s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux.

Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé borné. Lien avec la dérivation en des points où le fonction est continue.

Primitives ; ensemble des primitives ; égalité $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, f étant continue sur $[a, b]$ et admettant F pour primitive.

Calcul de primitives ; intégration par parties.

2 - On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici (additivité, unité d'aire, ...).

Applications du calcul intégral à l'évaluation de l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $f(x)$, f étant une fonction positive, monotone par morceaux, puis une fonction positive continue.

Extension à $b < a$ et à une fonction négative.

3 - * Application géométriques, mécaniques, physiques, etc. (calcul de volumes, masses, moments d'inertie ; vitesse et distance parcourue ; intensité et quantité d'électricité ; puissance et énergie ; etc.). Valeur efficace d'un phénomène périodique.

V. – Exemples de fonctions d'une variable réelle

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves, pourront illustrer les chapitres précédents ; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1 - Fonction $x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$; dérivée ; primitive.

2 - Fonction $x \longmapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q},\ x > 0)$; dérivée ; primitive.

3 - Suites arithmétiques et géométrique. Somme des n premiers termes

4 - Fonctions circulaires ; dérivées (révision) ; dérivées et primitives de :

$$x \longmapsto \cos(ax+b) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \sin(ax+b)$$

5 - Logarithme népérien (notation Log) ; $\text{Log}\, x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $(x > 0)$. Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini de $\text{Log}\, x$ et $\dfrac{\text{Log x}}{x}$. Limite de $x\text{Log}\, x$ quand x tend vers 0. Représentation graphique.

6 - Fonction exponentielle (notation exp).

Propriétés ; dérivée ; représentation graphique ; nombre e ; notation e^x ; limite de $\dfrac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

7 - Autres fonctions logarithmique et exponentielles.

Relation entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, et celles de base e.

* Notation e^{ix} pour désigner $\cos x + i \sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{i\omega x}$.

Remarque. L'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

8 - Calcul numérique.

Usage de la règle à calcul.

Usages des tables ; pratique de l'interpolation linéaire. Tables de logarithmes.

Üsage de machines à calculer de bureau.

9 - Équations différentielles.

Recherche des fonctions numériques une on deux fois dérivables de la variable réelle x vérifiant les équations :

$y' = ay$, a étant une constante réelle,

$y'' + \omega^2 y = 0$, ω étant une constante réelle non nulle (on admettra que les solutions forment un espace vectoriel de dimension deux).

VI. – Éléments de géométrie affine et euclidienne

N.B. – Dans ce paragraphe le corps de base est $\mathbb{R}$ et la dimension n est toujours égale à 2 ou 3. Une « *transformation d'un ensemble E* » est une bijection de E sur lui-même ; une application f de E dans lui-même est une involution si $f \circ f$ est l'identité : c'est une transformation de E.

1 - Somme directe de deux sous-espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ; image et noyau. Addition et composition des applications linéaires.

Groupe linéaire. Homothéties vectorielles.

2 - Barycentre dans un espace affine. Variété affine. Repère affine.

Réduction dans le cas euclidien de $f(\mathrm{M}) = a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 + c\mathrm{MC}^2$

3 - Application affine d'un espace affine E dans lui-même, application linéaire associée. Exemples : projection parallèle sur un sous-espace affine ; involution affine ; leurs points fixes. Translation et homothétie : leurs caractéristiques géométriques.

Une transformation de E qui transforme tout triplet de points alignés en un triplet de points alignés est affine.

4 - Applications linéaires d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même conservant la norme ; transformations orthogonales (isométries vectorielle), groupe orthogonal.

Dans le plan vectoriel et dans l'espace vectoriel de dimension trois, éléments fixes des transformations orthogonales involutives (symétries). Orientation du plan vectoriel euclidien (rappel de la classe de Première).

Étude des rotations vectorielles de l'espace vectoriel euclidien de dimension trois (par définition une telle rotation est, soit l'identité, soit une transformation orthogonale qui a pour seuls éléments fixes ceux d'une droite vectorielle) ; groupe des rotations vectorielles : orientation de l'espace.

Produit vectoriel, dans l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois.

5 - Définition d'une isométrie de l'espace affine euclidien. Toute isométrie est une bijection affine. Groupe des isométries ; sous-groupe des déplacements.

Dans le plan affine euclidien, symétries, translations, rotations : tout déplacement est de l'un de ces derniers types.

Dans l'espace affine euclidien de dimension trois, symétries, translations, rotations, vissages ; tout déplacement est de l'un de ces trois derniers types.

Exemples simples de groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné.

VII. – Compléments de géométrie euclidienne plane

1 - Angle d'un couple de demi-droites vectorielles (rappel de Première). Groupe $\mathscr{A}$ des angles de demi-droites.

Angle d'un couple de droites vectorielles (ensemble des deux rotations vectorielles transformant la première en la seconde).

Groupe $\mathscr{A}'$ des angles de droites.

L'homomorphisme canonique $\mathscr{A} \longmapsto \mathscr{A}'$; son noyau.

L'isomorphisme de $\mathscr{A}'$ sur $\mathscr{A}$ déduit de l'homomorphisme $\alpha \longmapsto \alpha + \alpha$ de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}$.

Condition, en terme d'angles de droites, pour que quatre points soient cocycliques.

2 - Similitudes planes (i.e. applications du plan dans lui-même conservant les rapports de distance). Représentation par les formules $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ lorsque l'on a identifié le plan à $\mathbb{C}$ grâce au choix d'un repère orthonormé. Points fixes d'une similitude.

Groupe des similitudes du plan et sous-groupes remarquables.

3 - Étude des courbes représentées, dans un repère orthonormé, par des équations de la forme : $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ $(|a| + |b| \neq 0)$. Différentes formes de ces courbes ; existence d'axes ou de centres de symétrie, d'asymptotes ; équations réduites ; existence de la tangente.

Ellipse, hyperbole, parabole définies par les propriétés de leurs points qui font intervenir les foyers et directrices (les propriétés des tangentes aux coniques sont hors de programme).

Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

VIII. – Probabilités

1 - Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), p)$.

Applications mesurables (ou variables aléatoires) : probabilité image, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Couple de variables aléatoires réelles, loi du couple. Lois marginales.

Couple indépendant. Système de n variables aléatoires globalement indépendantes.

2 - Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

Espérance mathématique de la somme des deux variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

3 - Épreuves répétées. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.